

МИНОБРНАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Московский архитектурный институт (государственная академия)»
(МАРХИ)
Кафедра «Начертательной геометрии»

Фаткуллина А.А.

**Методические указания к заданию по теме
«ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ.
СПОСОБ СФЕРИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ
И ПУЧКА ПЛОСКОСТЕЙ».
По дисциплине «Начертательная геометрия»**

Для студентов
Направления подготовки 07.03.01-Архитектура; 07.03.03 – Дизайн архитектурной среды
Уровень подготовки: бакалавриат

Москва 2015

УДК 514.18
ББК 22.151.3
Ф – 27

Фаткуллина А.А.

Методические указания по выполнению задания по теме: «Особые случаи пересечения поверхностей. Способ сферических сечений и пучка плоскостей» по дисциплине «Начертательная геометрия»/ А.А.Фаткуллина. – М.:МАРХИ, 2014. – 26 стр.

Рецензент – проф., доктор архитектуры Бондаренко И.А.
Рецензент – канд. архитектуры Орса Ю.Н.

В методических указаниях рассмотрено решение двух задач пересечения поверхностей: построения линии пересечения двух линейчатых поверхностей (конических и цилиндрических) и нахождения линии пересечения двух поверхностей вращения. Показано последовательное решение трех вариантов первой задачи – пересечение двух конических поверхностей, пересечение конической и цилиндрической поверхностей и пересечение двух цилиндрических поверхностей. Объяснено и проиллюстрировано решение задач пересечения двух поверхностей второго порядка с выбором в качестве посредника концентрических и эксцентрических сфер.

Методические указания предназначены для организации работы по выполнению задания по дисциплине «Начертательная геометрия» по теме «Особые случаи пересечения поверхностей. Способ сферических сечений и пучка плоскостей» для студентов направлений подготовки 07.03.01-Архитектура; 07.03.03 – Дизайн архитектурной среды. Уровень подготовки: бакалавриат

Методические указания утверждены заседанием кафедры «Начертательной геометрии», протокол № 9 от 6 мая 2015 года

Методические указания рекомендованы решением Научно-методического совета МАРХИ, Протокол № 09-14/15 от «20» мая 2015 .

© Фаткуллина А.А., 2015

© МАРХИ, 2015

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Задание состоит из двух задач. Задача 1 – построение линии пересечения двух линейчатых поверхностей способом пучка плоскостей. Задача 2 – построение линии пересечения двух поверхностей вращения способом сферических сечений.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Рассмотрим две поверхности M и N , занимающие общее положение в пространстве. Линия пересечения этих поверхностей строится с помощью вспомогательных секущих поверхностей. Последовательность действий следующая (рис. 1):

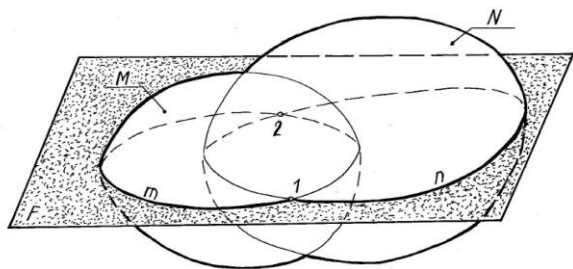


Рис. 1

Вводится третья – вспомогательная поверхность F (в данном случае плоскость), называемая посредником.

1) Строятся линии пересечения поверхности посредника с каждой из заданных поверхностей. С поверхностью M посредник пересекается по линии m , а с поверхностью N – по линии n .

2) Общие точки этих линий – точки 1 и 2 – принадлежат одновременно

трём поверхностям, следовательно, лежат на искомой линии пересечения поверхностей M и N .

Повторяя этот приём введения вспомогательной поверхности, определяется достаточное количество точек искомой линии пересечения.

При выборе посредника нужно руководствоваться следующим правилом:

проекции линии пересечения посредника с заданными поверхностями должны быть простыми в построении (прямыми линиями, окружностями).

ЗАДАЧА 1. Построение линии пересечения двух линейчатых поверхностей способом пучка плоскостей

При нахождении линии пересечения двух линейчатых поверхностей посредник должен пересекать данные поверхности по образующим – прямым линиям. Так, для конической поверхности удобно брать в качестве посредника плоскость общего положения, проходящую через её вершину, а для цилиндрической – плоскость параллельную образующим. Выбранные таким образом вспомогательные плоскости пересекают коническую и цилиндрическую поверхности по образующим – прямым линиям (рис. 2).

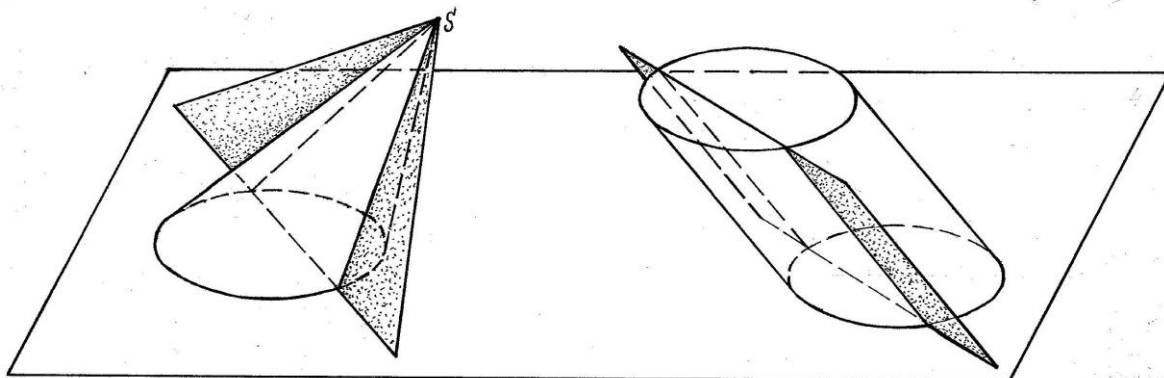


Рис. 2

При пересечении двух конических поверхностей вспомогательные плоскости (посредники) выбираются проходящими через прямую, соединяющую их вершины (рис. 3).

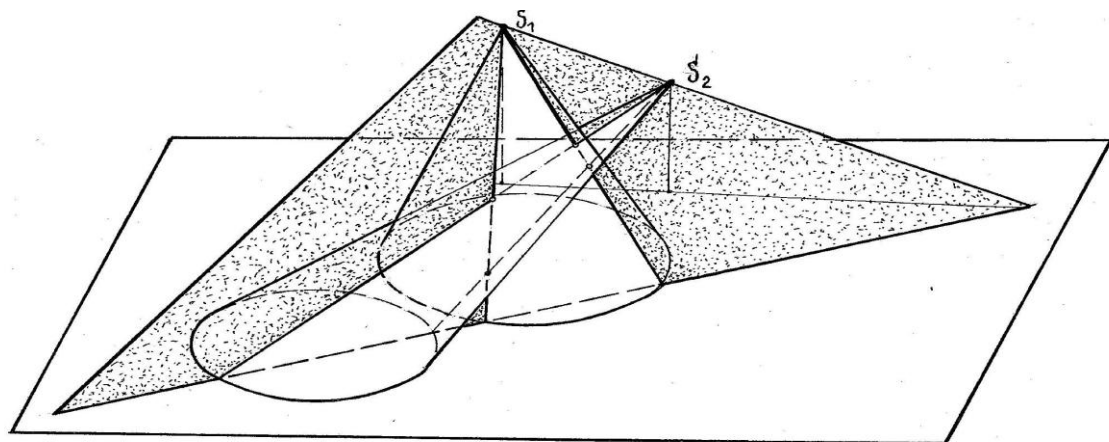


Рис. 3

При пересечении конической поверхности с цилиндрической вспомогательные плоскости проводят через вершину конической поверхности параллельно образующим цилиндрической поверхности (рис. 4).

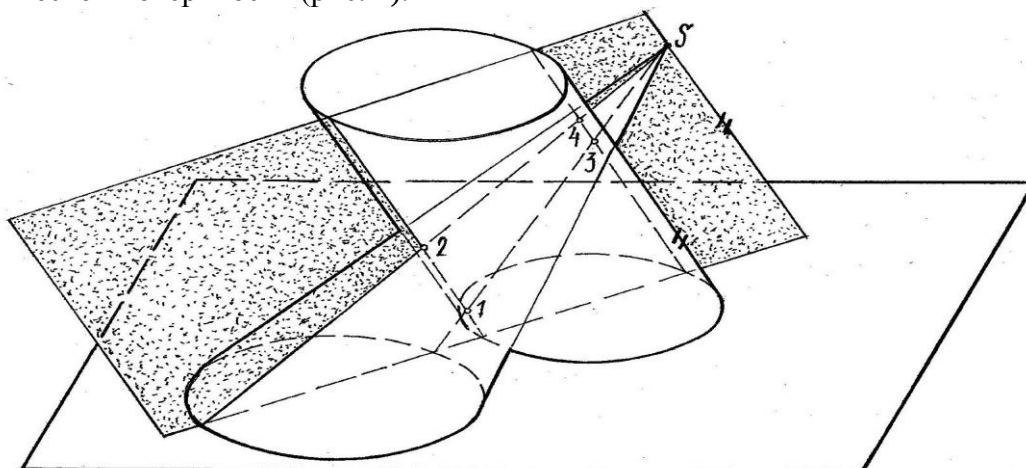


Рис. 4

При пересечении двух цилиндров вспомогательные плоскости параллельны образующим цилиндров (рис. 5).

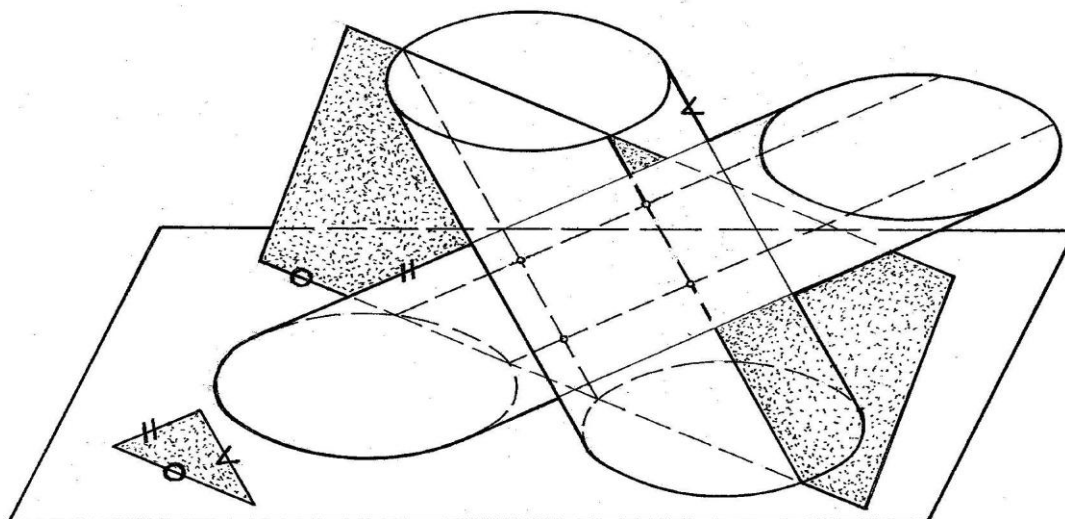


Рис. 5

В общем случае каждая вспомогательная плоскость пересекает каждую поверхность по двум образующим и дает возможность определить четыре точки, принадлежащие линии пересечения. Построение линии пересечения следует начинать с нахождения опорных точек, принадлежащих очерковым образующим заданных поверхностей.

Рассмотрим **пример 1** – пример пересечения двух конических поверхностей.

Основания данных конусов принадлежат одной плоскости – горизонтальной плоскости проекций. Проводим прямую через вершины S_1 и S_2 , и находим ее горизонтальный след – точку D . Все плоскости-посредники будут проходить через прямую $(S_1 S_2)$, а их горизонтальные следы будут проходить через точку D . Через точку D в плоскости H проводим два горизонтальных следа I_H и II_H плоскостей-посредников, которые касаются одного основания конуса и пересекают основание другого. Это следы плоскостей-посредников, которые занимают крайнее положение. Каждая из них касается одного конуса и пересекает другой. Горизонтальные следы других посредников выбираем между следами I_H и II_H .

След I_H касается основания первого конуса в точке C и пересекает основание второго конуса в точках C_1 и C_2 . Через точки C , C_1 и C_2 проводим образующие. Определяем точки пересечения этих образующих – точки **1**, **2**.

След II_H касается основания второго конуса в точке F и пересекает основание первого конуса в точках F_1 и F_2 . Через полученные точки проводим образующие FS_2 , F_1S_2 и F_2S_1 . Определяем горизонтальные проекции точек их пересечения – точки **3**, **4**. Находим фронтальные проекции точек **1**, **2**, **3**, **4**, построив фронтальные проекции образующих первого конуса которым они принадлежат (рис. 6).

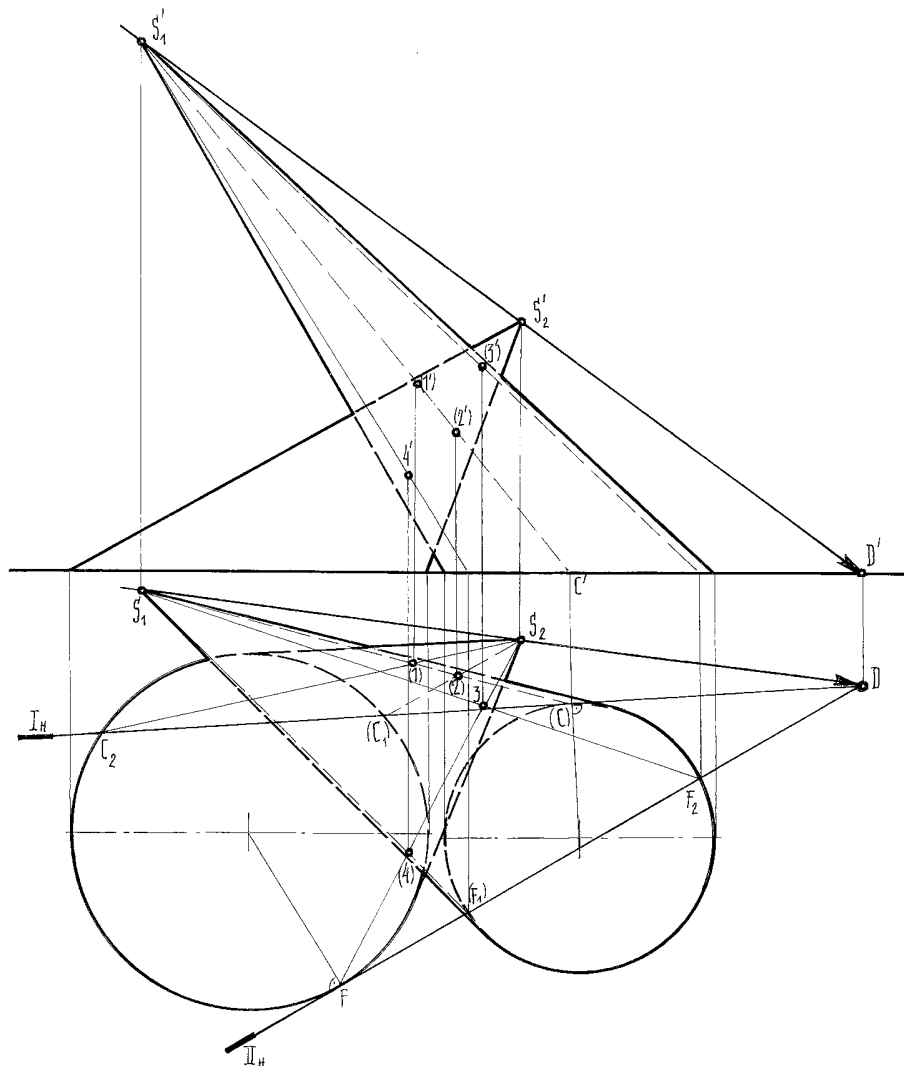


Рис. 6

Найдём характерные (опорные) точки линии пересечения поверхностей, которые принадлежат очерковым образующим конуса. Проводим горизонтальный след посредника Π_H через точку E . Плоскость-посредник Π пересекает второй конус по фронтальной очерковой образующей ES_2 . След пересекает основания конусов в точках E, E_1, E_2, E_3 . Проводим через них образующие, которые пересекаются в точках 5, 6, 7 и 8. Определяем фронтальные проекции этих точек, построив фронтальные проекции образующих E_2S_1 и E_3S_1 . Точки 5 и 6 являются опорными (рис.7).

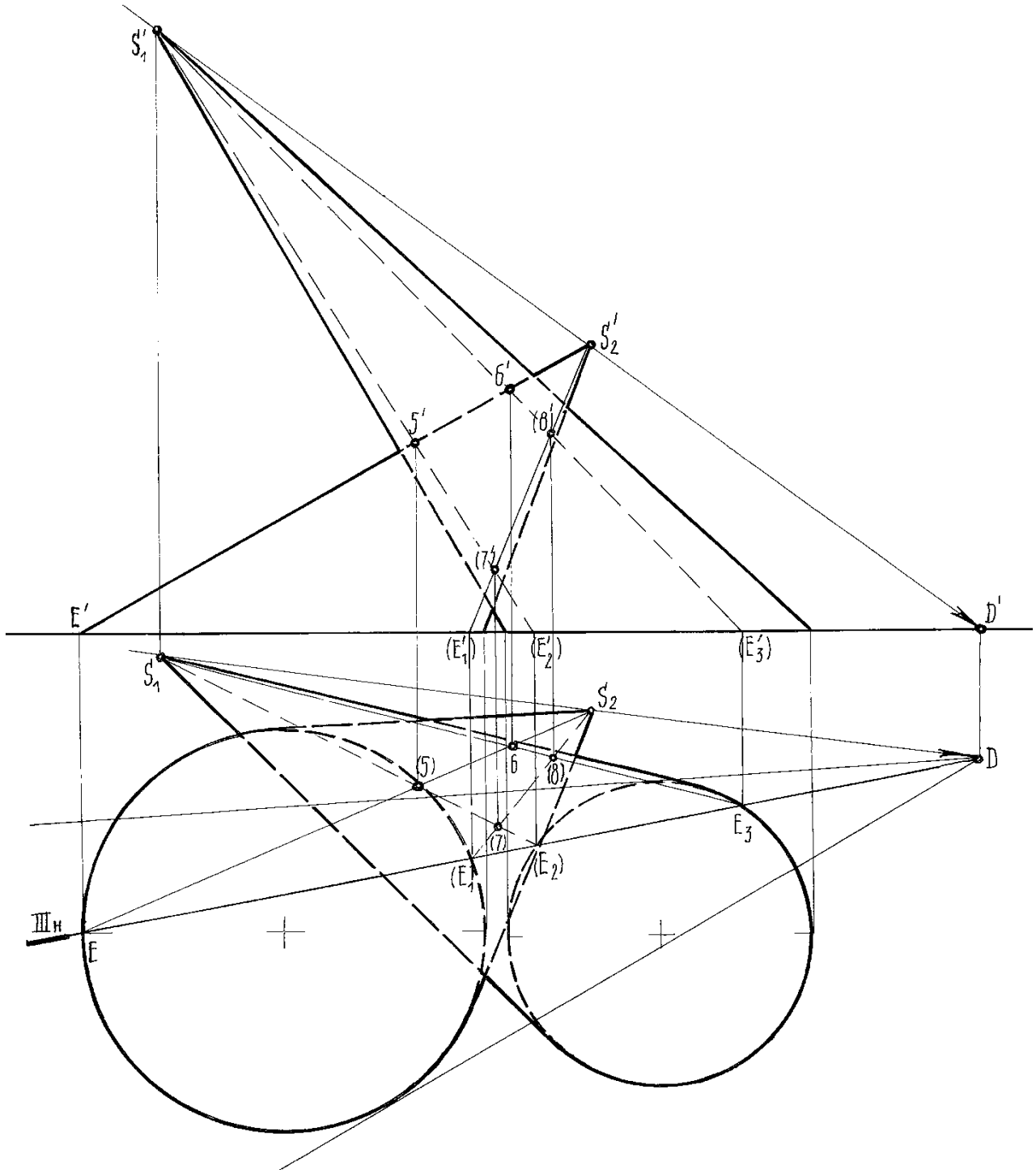


Рис. 7

Рассмотрим посредник, проходящий через горизонтальную очерковую образующую конуса S_1A . След этой плоскости $IV_H - DA$ пересекает основания конусов в точках A, A_1, A_2, A_3 . Через них проводим соответствующие образующие, которые пересекаются в точках **9, 10, 11, 12**. Следующая плоскость-посредник проходит через очерковую образующую S_1B . Её след IV_H пересекает основания конусов в точках B, B_1, B_2, B_3 . Образующие, проведённые через эти точки, пересекаются в точках **13, 14, 15 и 16**. Точки **9, 10, 13, 16** являются опорными (рис. 8).

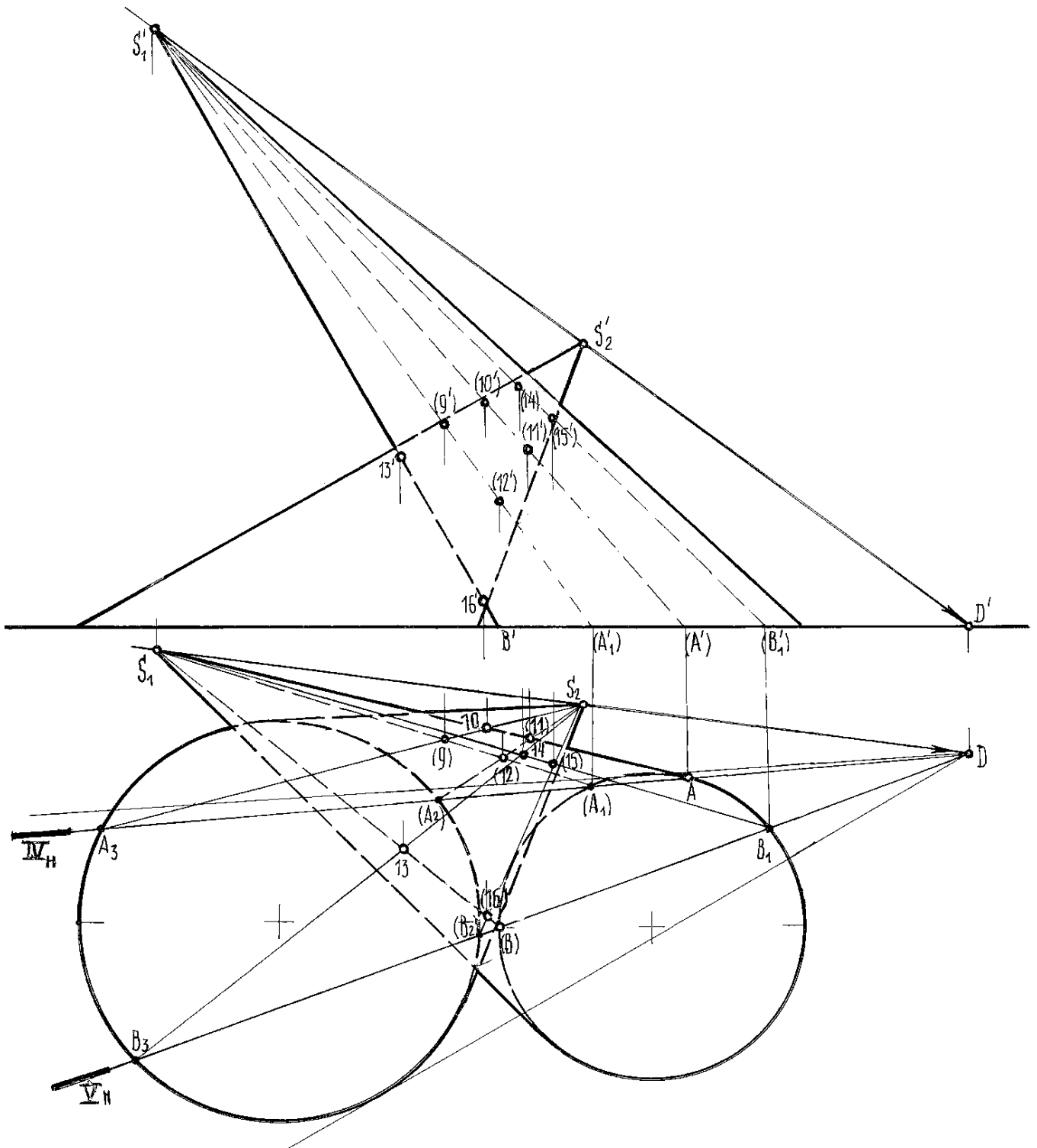


Рис. 8

На рисунке 9 показано построение линии пересечения рассмотренного выше первого примера.

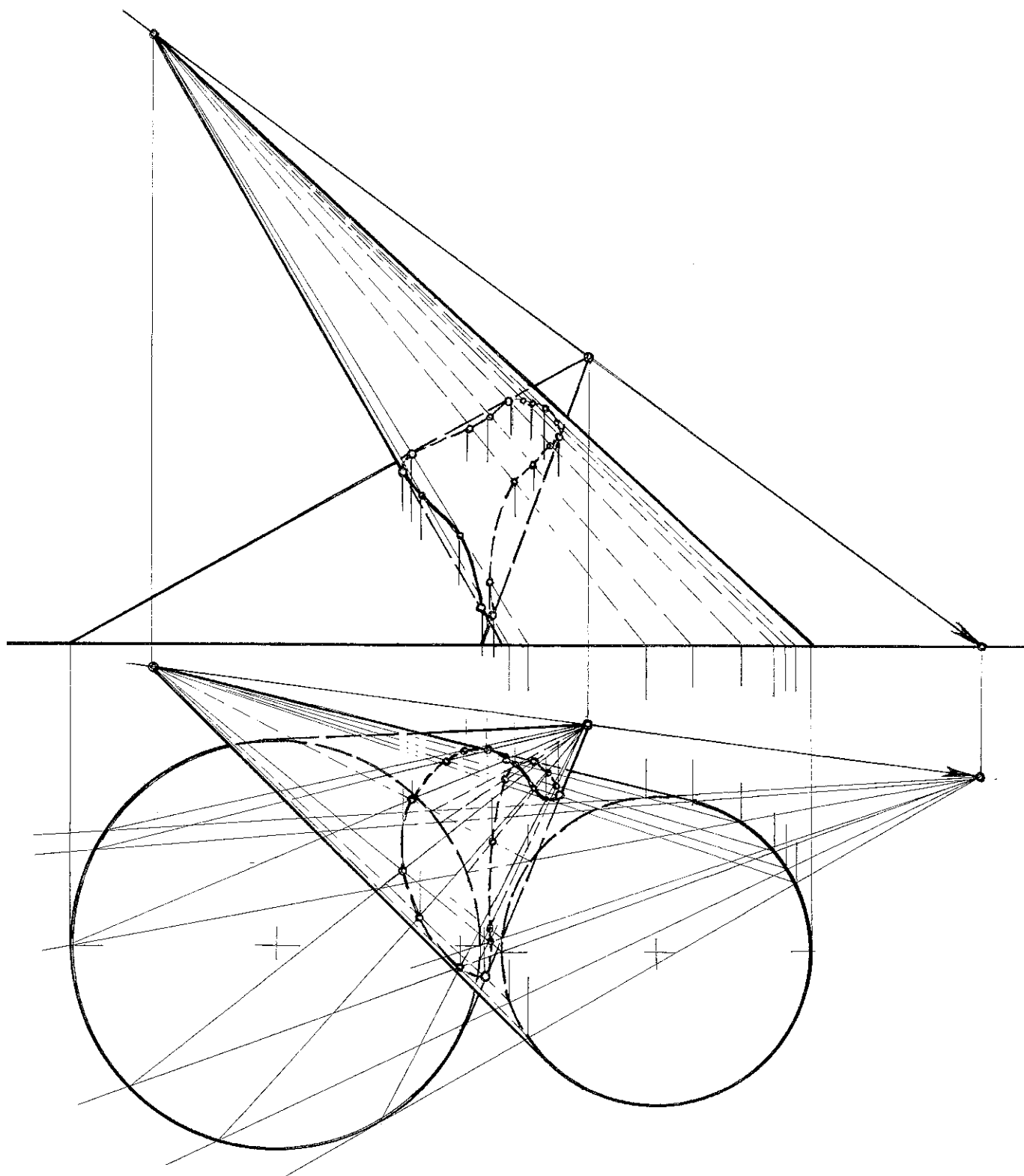


Рис. 9

На рисунке 10 показаны фрагменты двух конусов с полученными вырезами. Внутренняя часть поверхностей заштрихована.

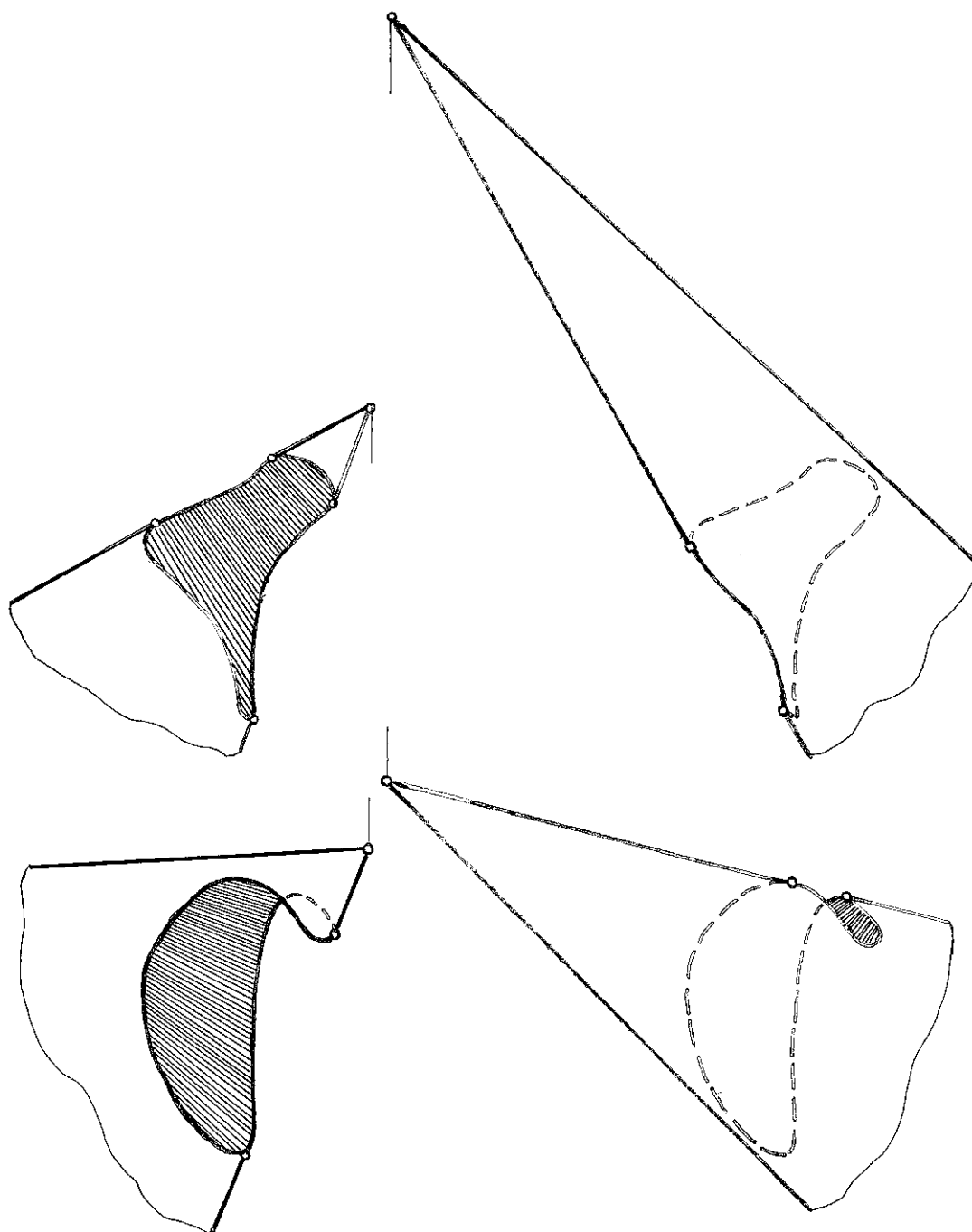


Рис. 10

Рассмотрим **пример 2** - пример пересечения конической и цилиндрической поверхностей.

Основания конуса и цилиндра принадлежат одной плоскости – горизонтальной плоскости проекций. Проводим прямую через вершину конуса S параллельно образующим цилиндра. Определяем горизонтальный след этой прямой – точку D . Все плоскостопосредники будут проходить через прямую SD , а их горизонтальные следы будут проходить через точку D . Через точку D в плоскости H проводим две прямые I_H и II_H , которые касаются основания конуса и пересекают основание цилиндра. I_H и II_H – это горизонтальные

следы плоскостей-посредников, которые занимают крайнее положение, они касаются поверхности конуса и пересекают цилиндр.

След I_H касается основания конуса в точке A и пересекает основание цилиндра в точках A_1 и A_2 . Проводим образующие поверхностей через данные точки. Определяем точки пересечения образующих – это точки $1, 2$. Находим фронтальные проекции этих точек, построив фронтальную проекцию образующей AS .

След II_H касается основания конуса в точке B и пересекает основание цилиндра в точках B_1 и B_2 . Через полученные точки проводим образующие конуса и цилиндра. Определяем точки их пересечения – точки $3, 4$. Находим фронтальные проекции этих точек, построив фронтальную проекцию образующей BS . (рис. 11).

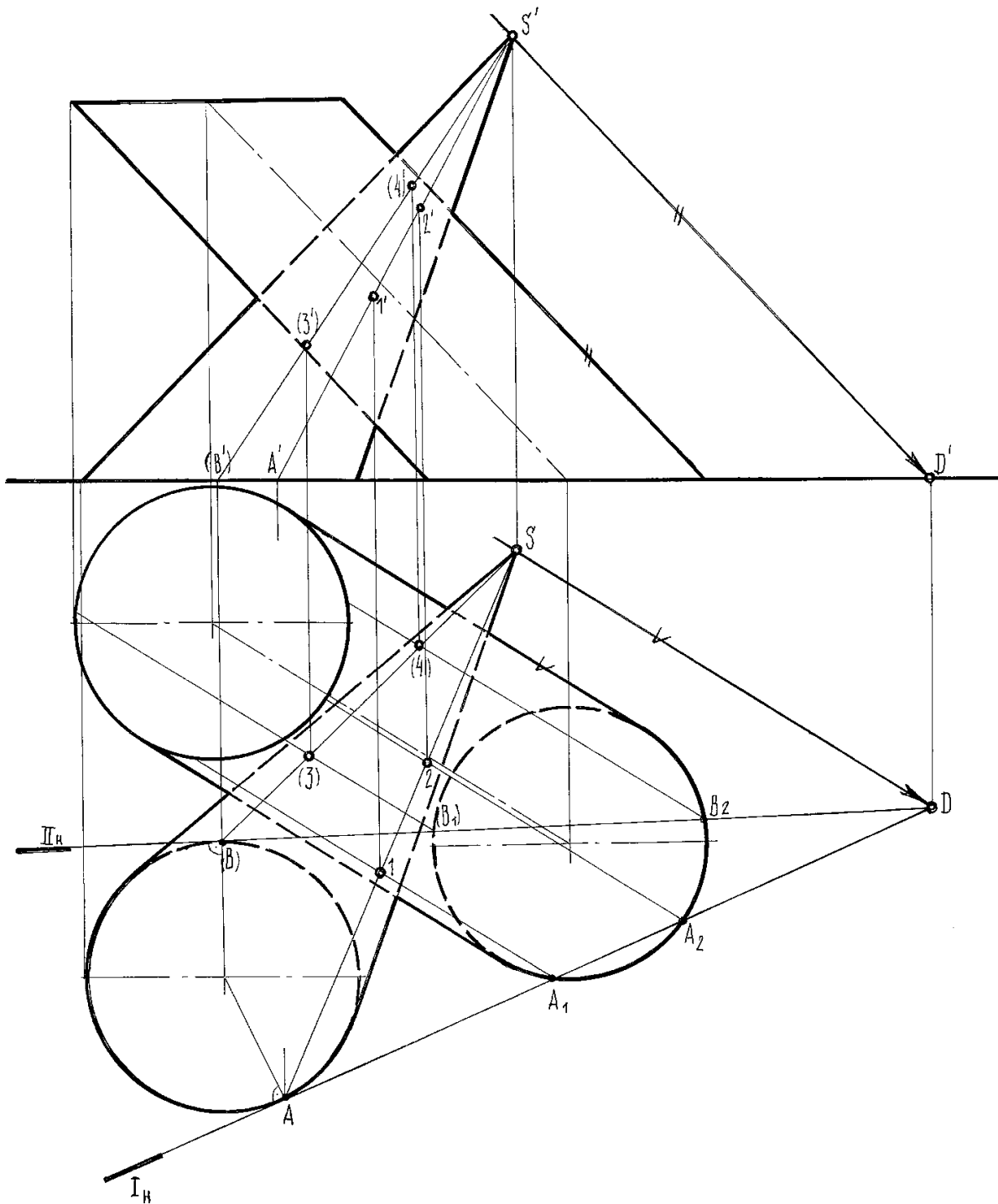


Рис. 11

Найдём характерные (опорные) точки линии пересечения, которые принадлежат горизонтальным очерковым образующим конуса. Рассмотрим посредник **III**, проходящий через горизонтальную очерковую образующую конуса **CS**. Проводим горизонтальный след **III_H** через точку **C**. След пересекает основание конуса в точке **C₁**, а основание цилиндра в точках **C₂**, **C₃**. Проводим через эти точки образующие, которые пересекаются между собой в точках **5**, **6**, **7** и **8**. Определяем и фронтальные проекции этих точек, построив фронтальные проекции образующих **C₁S** и **CS**. В данном примере образующая цилиндра, проходящая через точку **C₂** является горизонтальной очерковой. Точки **5**, **6** и **7** являются опорными.

Рассмотрим посредник **IV**, проходящий через горизонтальную очерковую образующую **ES**. Горизонтальный след **IV_H** проходит через точки **E** и **E₁** основания конуса и пересекает основание цилиндра в точках **E₂**, **E₃**. Проводим соответствующие образующие через данные точки и определяем точки их взаимного пересечения – **9**, **10**, **11**, **12**. Образующая цилиндра, проходящая через точку **E₂** является фронтальной очерковой образующей. Таким образом, точки **9**, **10**, **12** являются очерковыми. (рис.12).

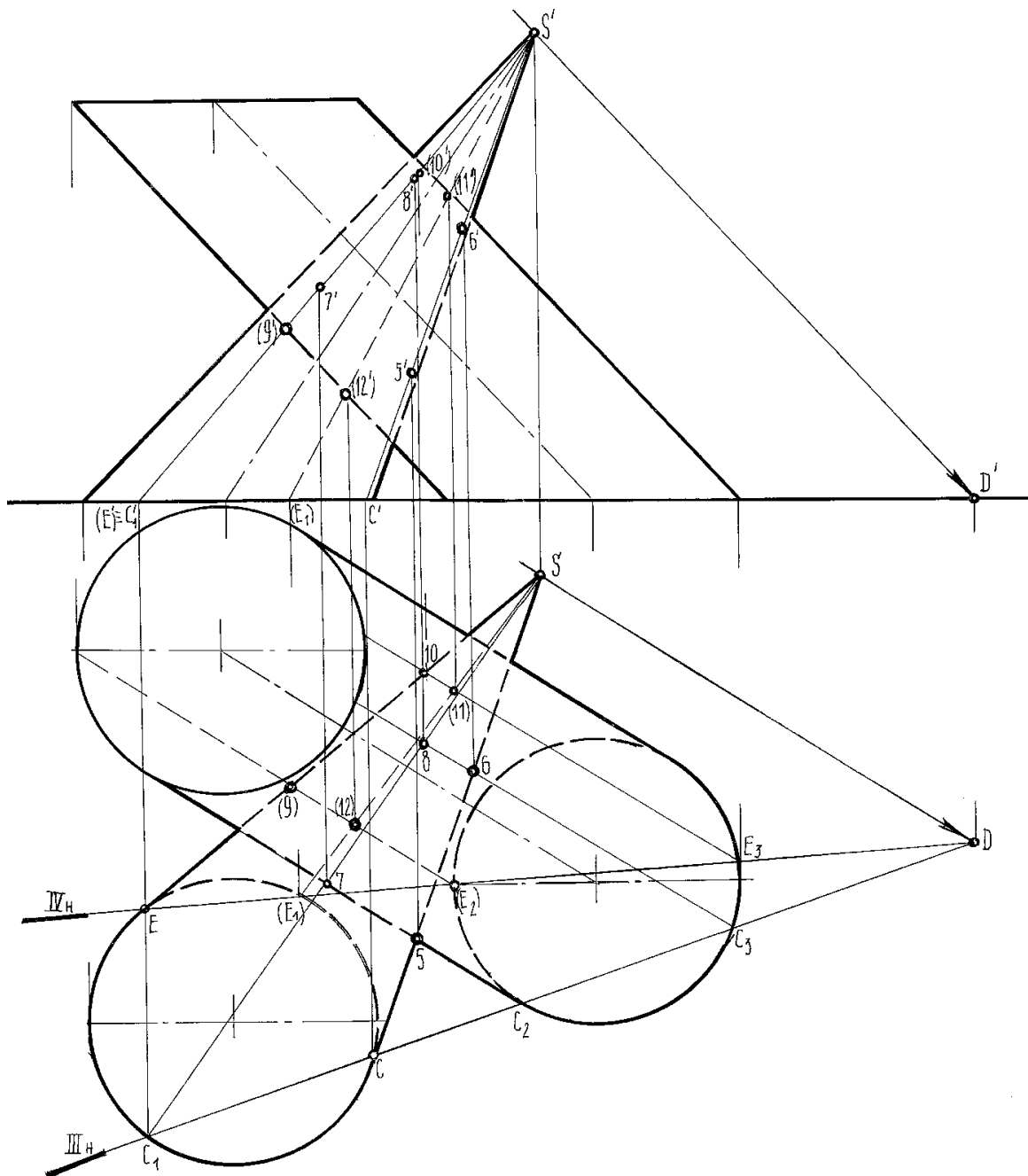


Рис. 12

Рассмотрим посредники, проходящие через фронтальные очерковые образующие конуса ES и FS , и через фронтальную образующую цилиндра GG_0 . Горизонтальный след V_H проводим через точку F , он пересекает основание конуса в точке F_1 и основание цилиндра в точках F_2 и F_3 . Через данные точки проводим соответствующие образующие, которые пересекаются между собой в точках **13, 14, 15, 16**.

Следующую плоскость-посредник проводим через очерковую образующую SE . Её след VI_H пересекает основания конуса и цилиндра в точках E, E_1, E_2, E_3 . Образующие, проведённые через эти точки, пересекаются в точках **17, 18, 19, 20**.

Горизонтальный след VII_H проводим через точку G . Он пересекает основание цилиндра и в точке G_1 , а основание конуса в точках G_2 и G_3 . Проводим через данные точки образующие поверхностей, которые между собой пересекаются в точках **21, 22, 23, 24**.

Точки **13, 14, 17, 18, 21, 22** являются опорными (рис. 13).

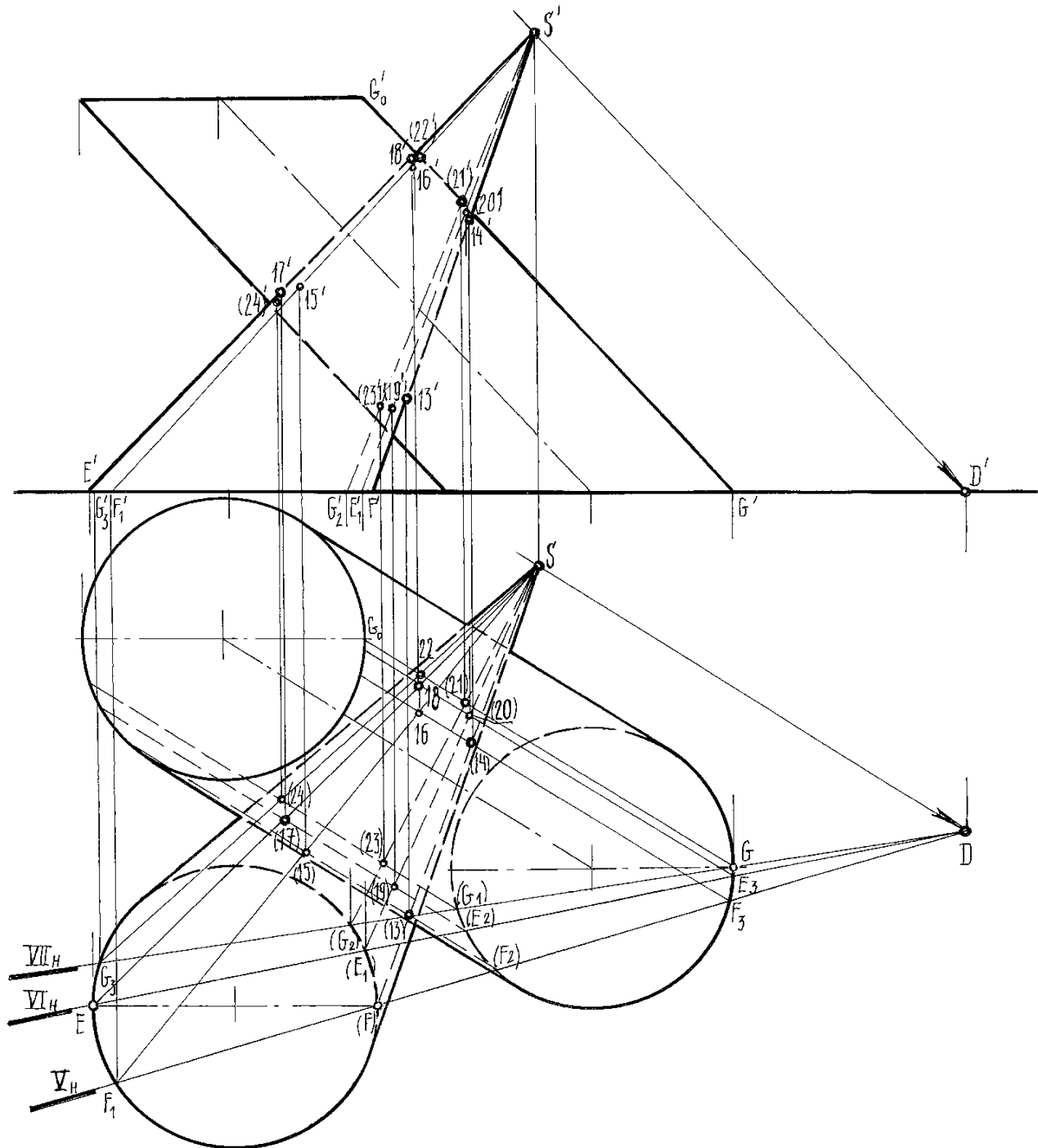


Рис. 13

На рисунке 14 показано построение линии пересечения рассмотренного выше второго примера.

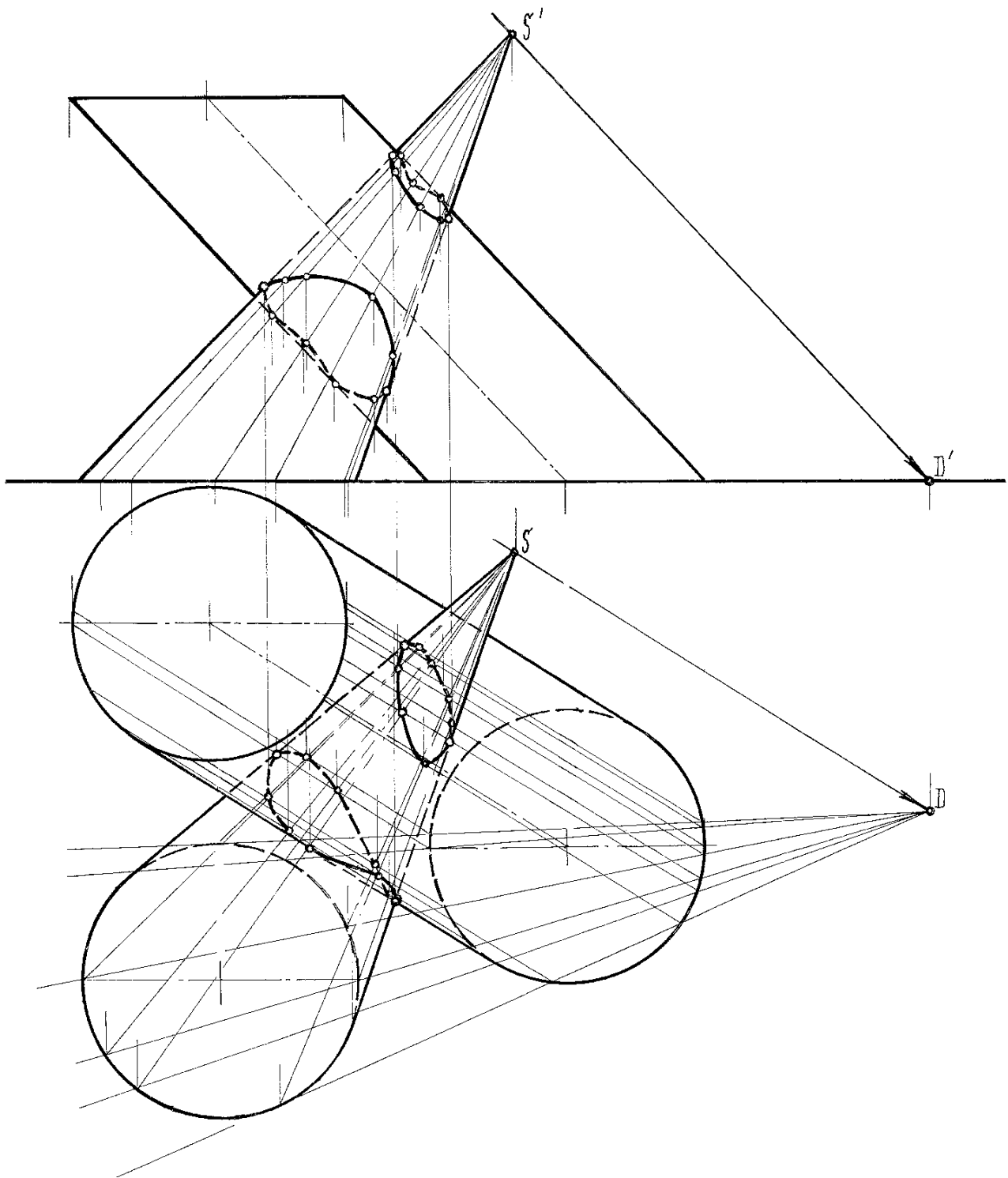


Рис. 14

На рисунке 15 показаны фрагменты цилиндра и конуса с полученными вырезами. Внутренняя часть поверхностей заштрихована.

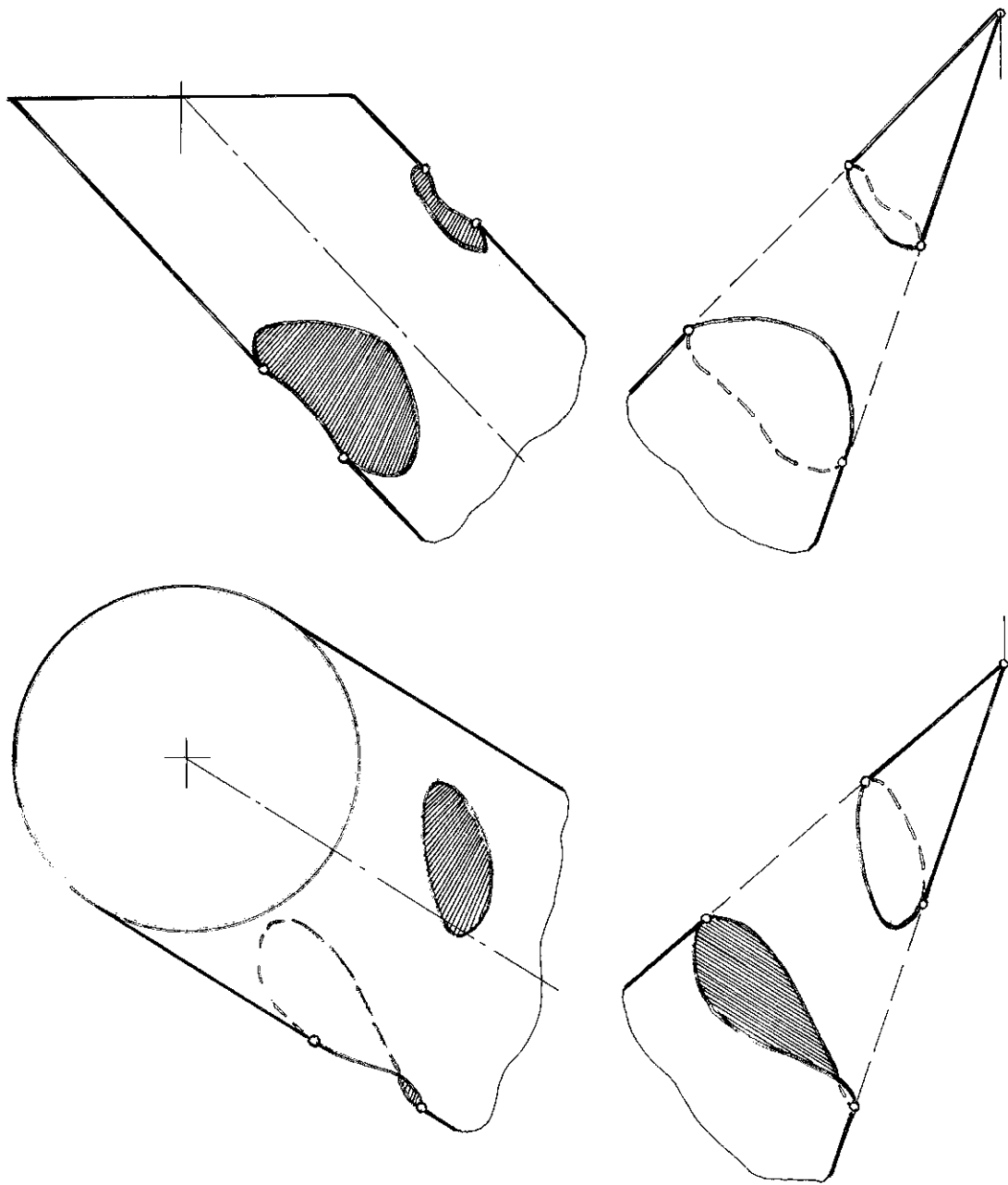


Рис. 15

Рассмотрим **пример 3** - пример пересечения двух цилиндрических поверхностей.

Основания двух данных цилиндрических поверхностей принадлежат горизонтальной плоскости проекций. При решении задачи плоскости-посредники выбираются параллельно образующим цилиндров. Для этого в произвольном месте построим такую плоскость. Через произвольную точку P проведем две прямые, параллельные образующим цилиндров. Определим их горизонтальные следы – N, M .

Определяем крайние положения плоскостей-посредников: их горизонтальные следы параллельны NM , касаются основания одного цилиндра и пересекают основание другой цилиндрической поверхности. След I_H параллелен NM и касается основания первого цилиндра в точке A , а основание второго цилиндра он пересекает в точках A_1 и A_2 . Через данные точки проводим образующие цилиндров. Определяем точки пересечения соответствующих образующих – 1, 2. След II_H проводим так, что он касается основания второго цилиндра (точка B) и пересекает основание первого – точки B_1, B_2 . Образующие, проведенные через данные точки, пересекаются между собой в точках 3 и 4 (рис. 16).

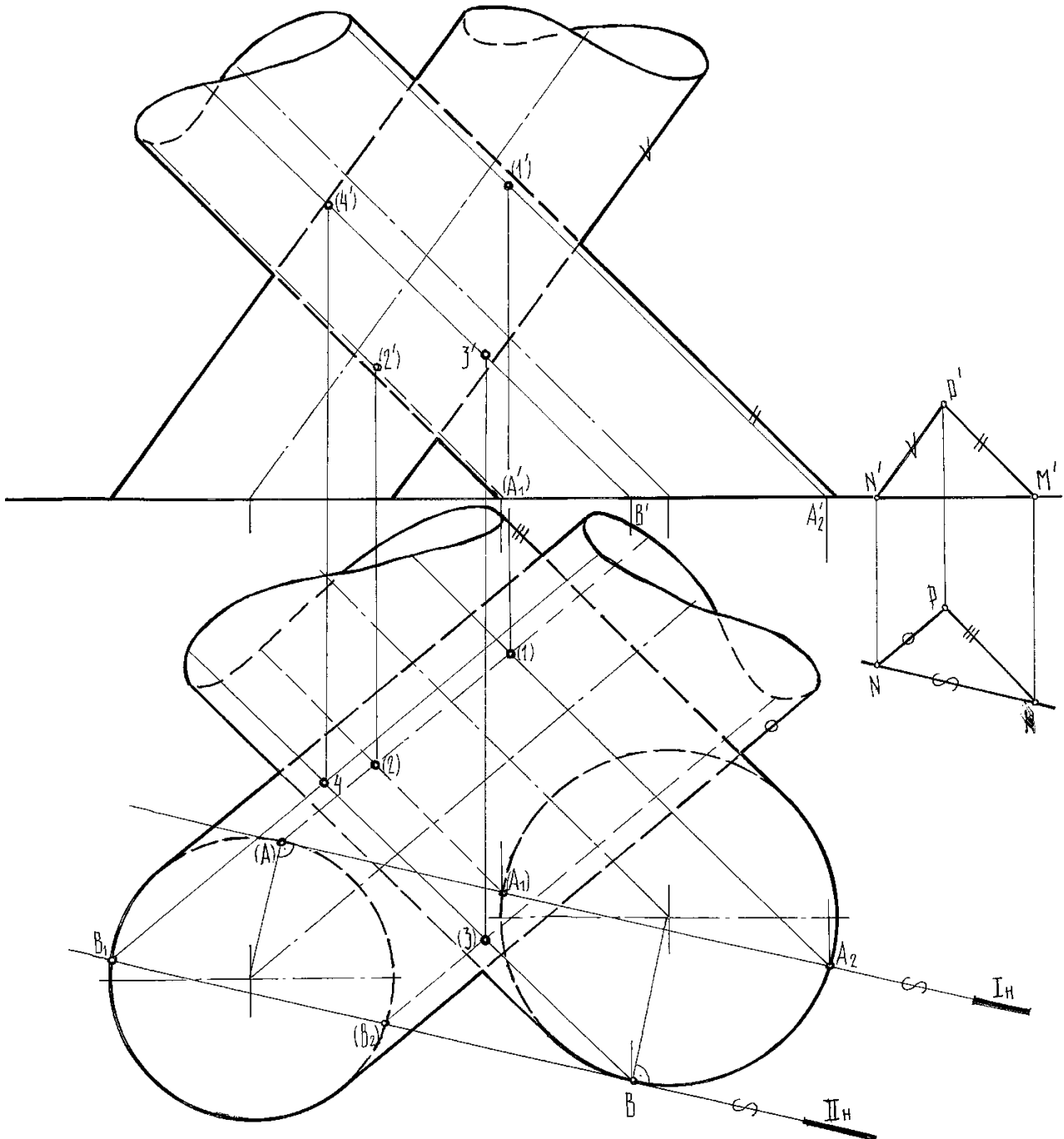


Рис. 16

Для определения опорных точек линии пересечения задаем посредник, проходящий через очерковую образующую цилиндра. След III_H проводим через точку C основания второго цилиндра, лежащую на горизонтальной оси. Он пересекает это же основание в точке

C_3 , а основание первого цилиндра – в точках C_1 и C_2 . Через данные точки строим образующие соответствующих цилиндров. Находим точки пересечения образующих – 5, 6, 7, 8. Точки 5, 6 принадлежат фронтальной очерковой образующей второго цилиндра и являются опорными точками.

Горизонтальный след следующей плоскости-посредника IV проводим через точку D основания первого цилиндра. След пересекает это же основание в точке D_3 , а основание второго цилиндра – в точках D_1 и D_2 . Проведя образующие соответствующих цилиндров через данные точки, находим точки их пересечения – 9, 10, 11, 12. Опорными точками являются точки 9 и 10. (рис. 17)

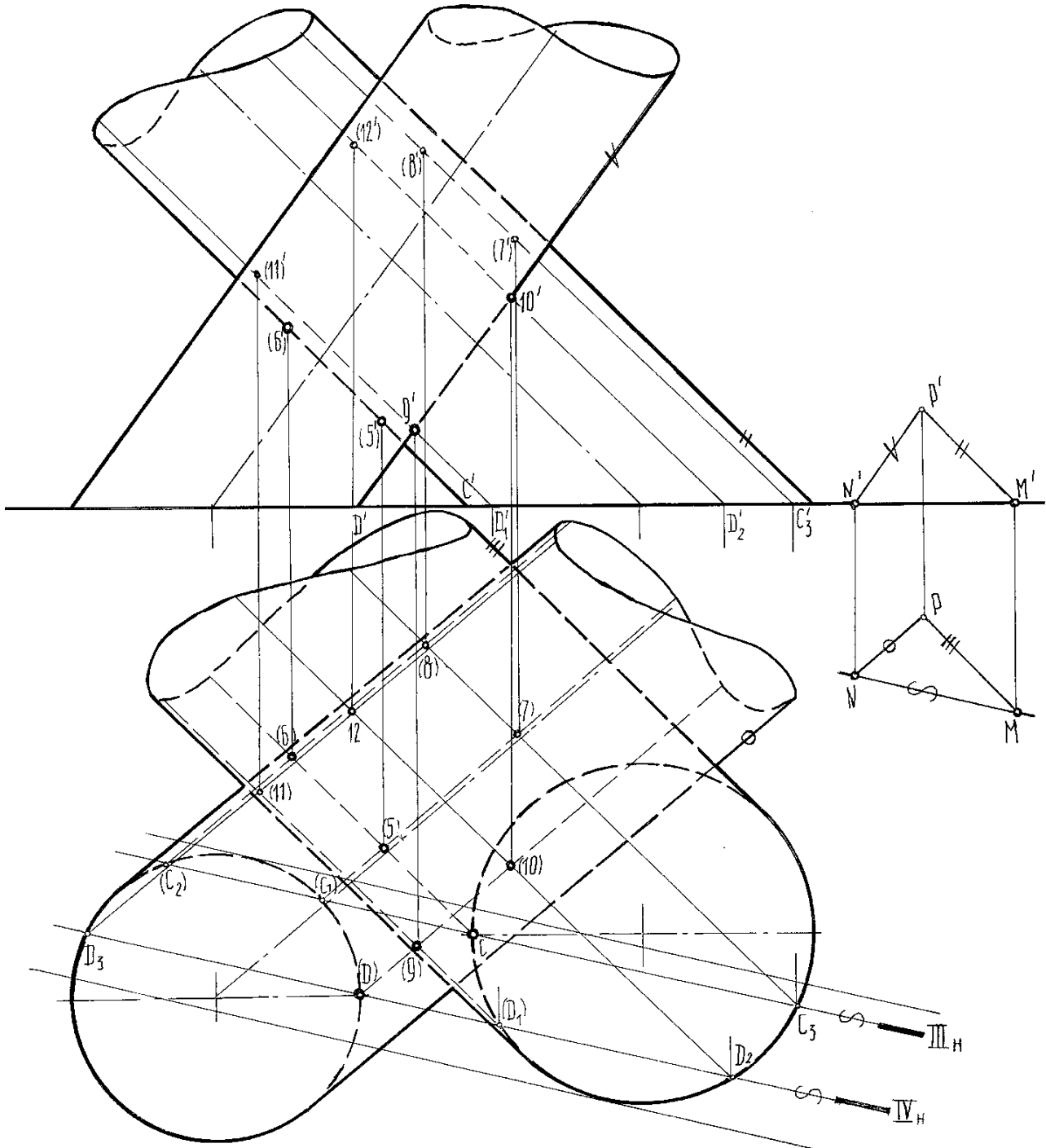


Рис. 17

Определим точки линии пересечения данных цилиндрических поверхностей, лежащих на горизонтальных очерковых образующих. След V_H проводим через характерную точку E основания первого цилиндра. Построенный след пересекает основание второго цилиндра в точках E_1 и E_2 , а основание первого цилиндра и в точке E_3 . Проводим через данные точки основания образующие соответствующих цилиндров и определяем точки их пересечения – **13, 14, 15, 16**. Находим фронтальные проекции точек.

Следующий горизонтальный след проводим параллельно NM через характерную точку F основания второго цилиндра. След VI_H пересекает основания цилиндров в точках F, F_3, F_1, F_2 . Через данные точки проводим образующие цилиндров, которые пересекаются между собой в точках **17, 18, 19, 20**. Находим и фронтальные проекции точек (рис. 18).

Из построенных точек опорными являются **13, 14, 17, 18**.

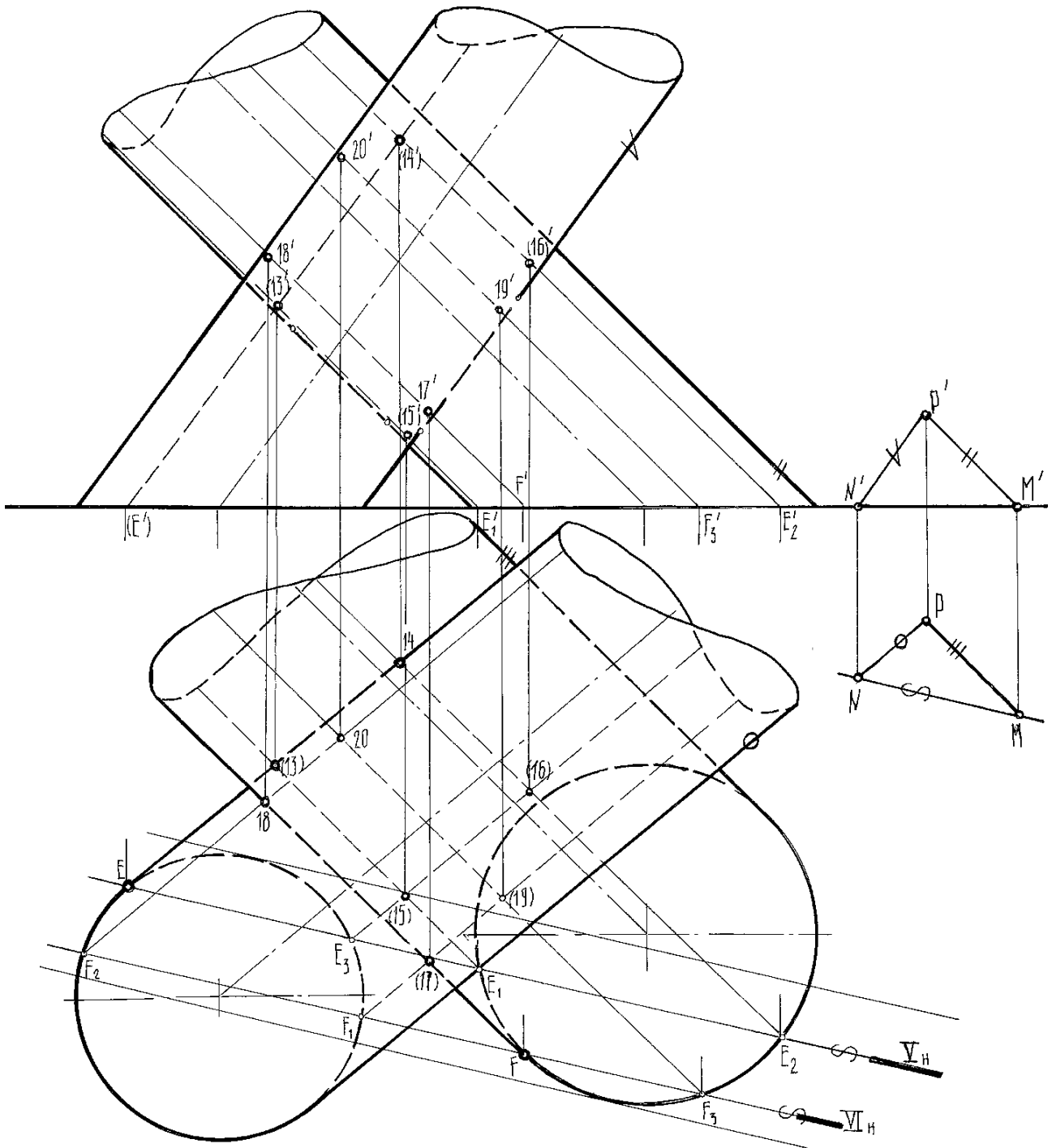


Рис. 18

На рис. 19 приведён чертёж решения рассмотренной третьей задачи.

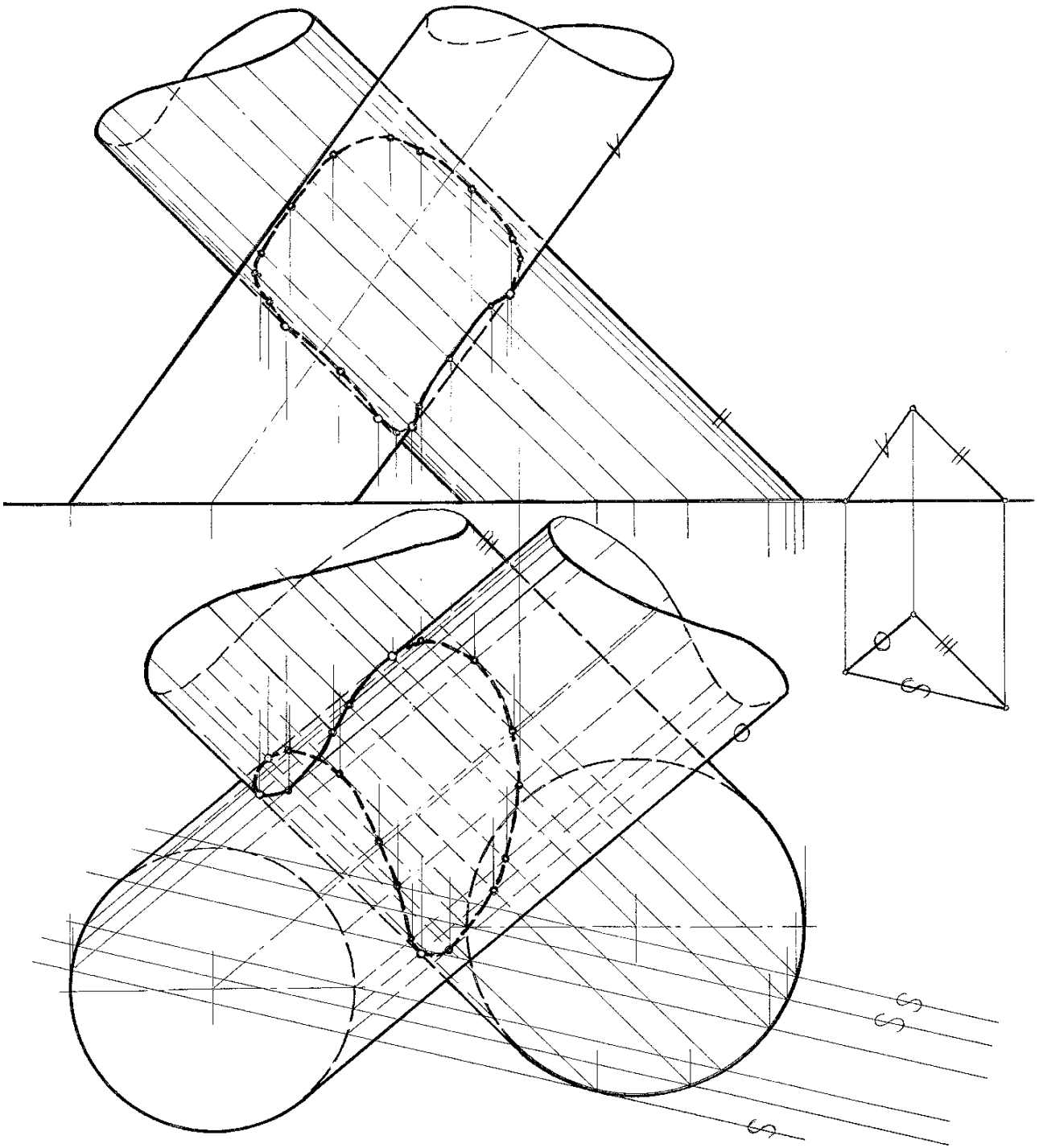


Рис. 19

На рисунке 20 показаны фрагменты двух цилиндров с полученными вырезами. Внутренняя часть поверхностей заштрихована.

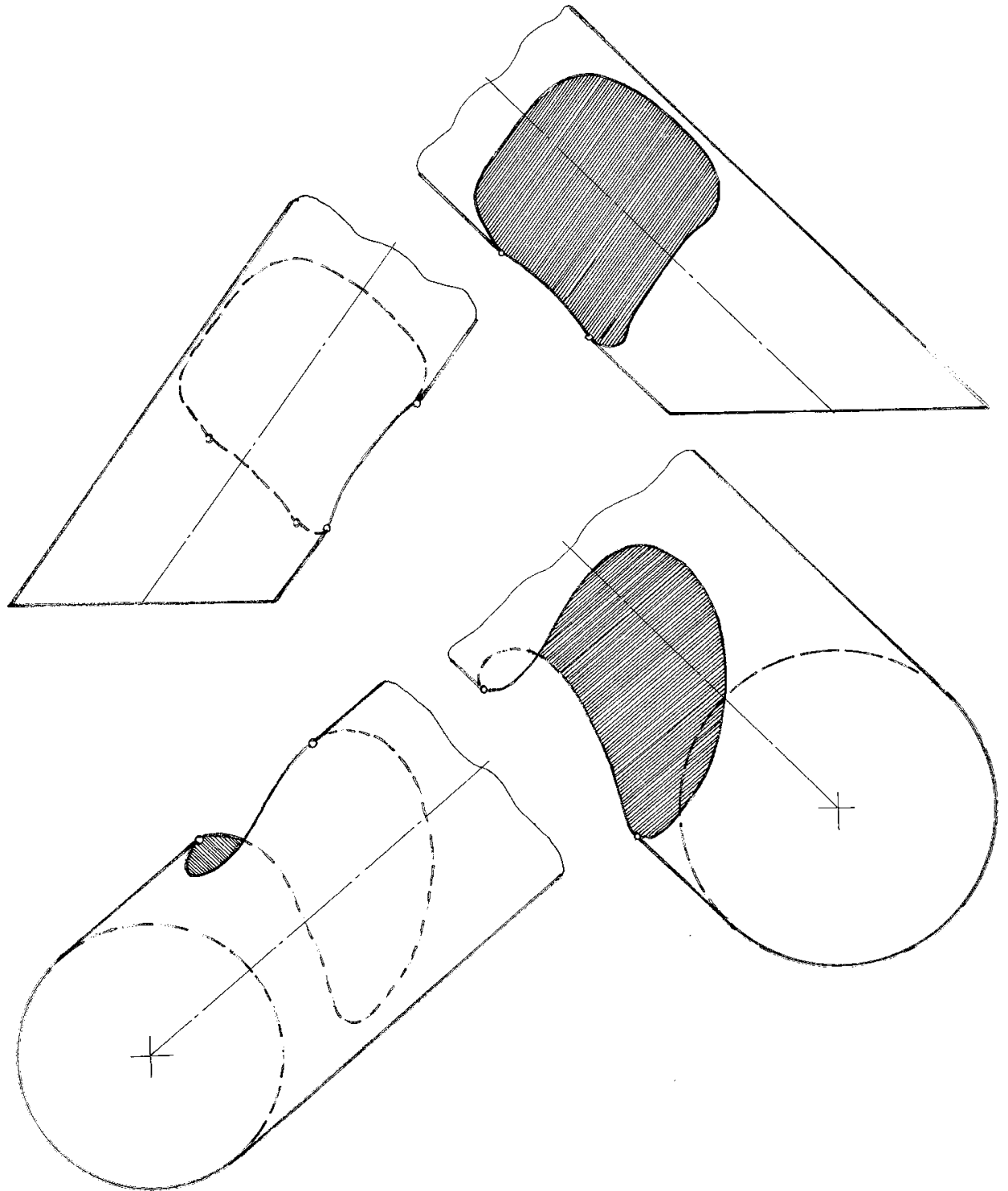


Рис. 20

ЗАДАЧА 2. Построение линии пересечения двух поверхностей второго порядка способом сферических сечений

Если оси вращения поверхностей вращения совпадают, то такие поверхности называются *соосными*. На рис. 21 показаны чертежи соосных конуса и эллипсоида вращения. Соосные поверхности пересекаются между собой по окружностям, фронтальная проекция которых вырождается в отрезок прямой, так как ось вращения параллельна фронтальной плоскости проекций. За ось вращения сферы может быть принята любая прямая, проходящая через её центр, т.е. любой её диаметр. Поэтому если центр сферы расположен на оси вращения поверхности вращения, то эта поверхность и сфера пересекаются по окружности или большему числу окружностям (рис. 22).

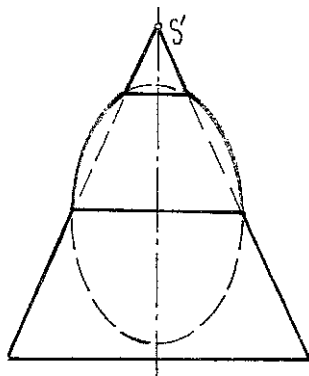


Рис. 21

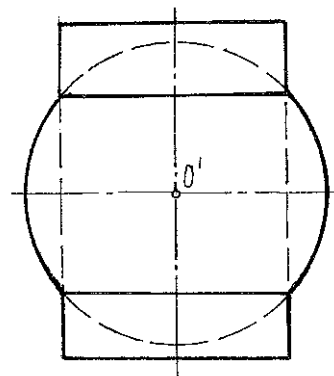


Рис. 22

Пример 4. При пересечении двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются, в качестве посредников целесообразно рассматривать концентрические сферы. Это возможно, если оси вращения поверхностей параллельны плоскости проекций. Центром сфер-посредников выбирается точка пересечения осей вращения поверхностей.

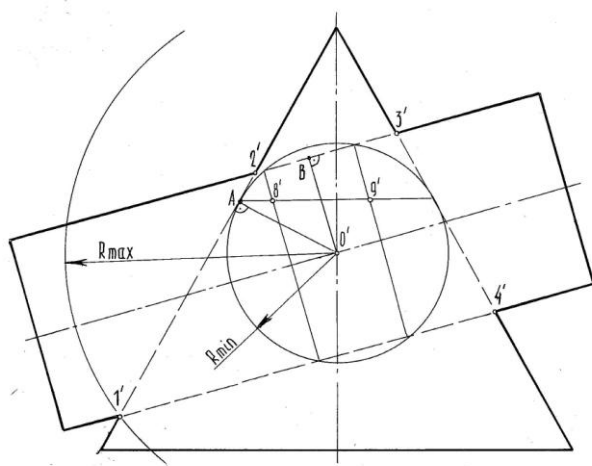


Рис. 23

Рассмотрим пример пересечения двух поверхностей вращения - конуса и цилиндра (рис.23). Оси вращения данных поверхностей пересекаются в точке O и параллельны фронтальной плоскости проекций. Определим фронтальную проекцию линии пересечения, не используя горизонтальной проекции поверхностей. Первые четыре точки искомой линии - это точки пересечения очерковых образующих поверхностей - $1', 2', 3', 4'$. Примем точку O за центр концентрических сфер. Определим минимальное и максимальное значение радиусов сфер-посредников. Сфера с минимальным значением радиуса должна касаться одной поверхности и пересекать другую.

Радиусы сфер, вписанных в конус и цилиндр, - это длина перпендикуляров, опущенных из точки O' к очерковым образующим поверхностей - $O'A$ и $O'B$. Минимальное значение радиуса - это длина отрезка $O'A$. Сфера с этим радиусом касается поверхности конуса и пересекает цилиндр по двум параллелям. Между собой проекции окружностей пересекаются в точках $8', 9'$. Максимальное значение радиуса сферы-посредника - это большее расстояние от центра O' до очерковых точек $1', 2', 3', 4'$. Максимальное значение радиуса в данной задаче - это длина отрезка $O'1'$.

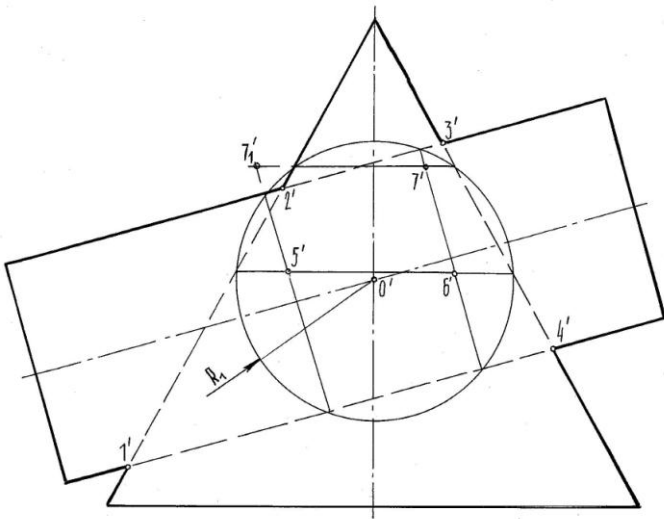


Рис. 24

пересекаются в точках 5^I , 6^I , 7^I . Продлевая отрезки прямых, находим точку их пересечения 7_1^I . Эта точка не принадлежит линии пересечения, но уточняет фронтальную ее проекцию (рис. 24).

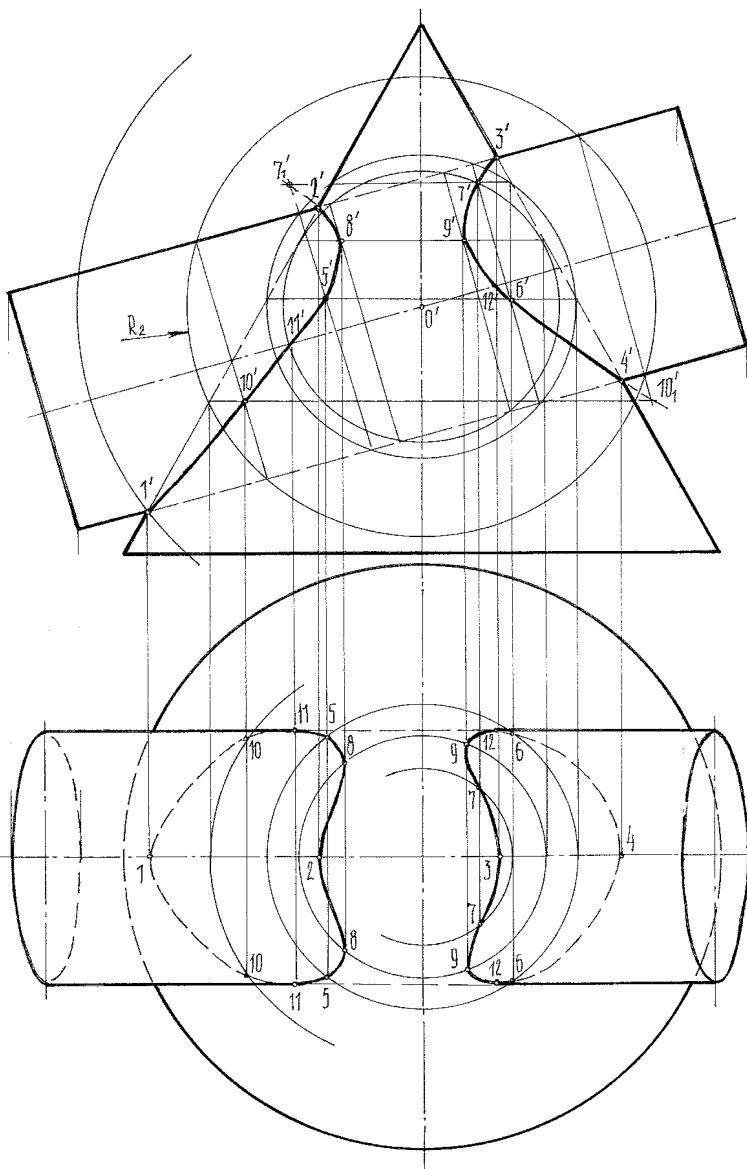


Рис. 25

Выбираем сферу-посредник с промежуточным значением радиуса R_1 , т.е. проводим окружность с центром O^I и радиусом, значение которого меньше максимального значения и больше минимального значения радиусов. Соединяем прямыми линиями соответствующие точки пересечения окружности с очерковыми образующими конуса и цилиндра – это проекции параллелей – линий пересечения сферы с данными

поверхностями. Между собой отрезки

Мы можем найти любое количество точек линии пересечения, изменяя значение радиуса сферы-посредника. С помощью сферы радиусом R_2 мы нашли точку 10^I и уточняющую точку 10_1^I . Определив фронтальную проекцию линии пересечения, находим ее горизонтальную проекцию. Для этого строим горизонтальные проекции параллелей конуса, которым принадлежат найденные точки пересечения. Определяем характерные точки – точки, принадлежащие очерковым образующим цилиндра. Их фронтальные проекции – это точки пересечения проекции оси вращения цилиндра с линией пересечения – 11^I и 12^I (рис. 25).

Рассмотрим **пример 5** – пересечение открытого тора и конуса вращения. Ось вращения тора перпендикулярна, а ось вращения конуса параллельна фронтальной плоскости проекции. Оси вращения поверхностей перпендикулярны между собой. Посредники в данной задаче эксцентрические сферы, которые пересекают конус и тор по окружностям. Центры сфер, пересекающих тор по окружностям-образующим лежат на прямой, перпендикулярной проекции окружности и проходящей через ее середину (рис. 26).

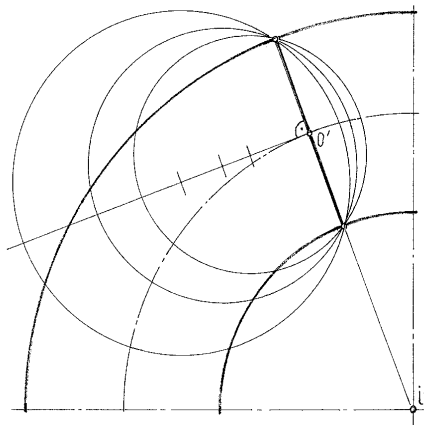


Рис. 26

Определим фронтальную проекцию линии пересечения (рис. 27).

Обозначим точки пересечения очерков поверхностей – точки $1^I, 2^I, 3^I$. Проекцию точек 4 и 4_1 определили, построив окружности и найдя точки их пересечения. Выбираем на поверхности тора окружность, проекция которой отрезок $a^I a^I$. Проводим через середину отрезка перпендикуляр до пересечения с осью конуса. Точка пересечения O_1^I – это центр сферы, которая пересекает тор по окружностям $a^I a^I$ и $b^I b^I$, а конус по окружностям $c^I c^I$ и $d^I d^I$. Между собой проекции окружностей пересекаются в точках 5^I и 8^I .

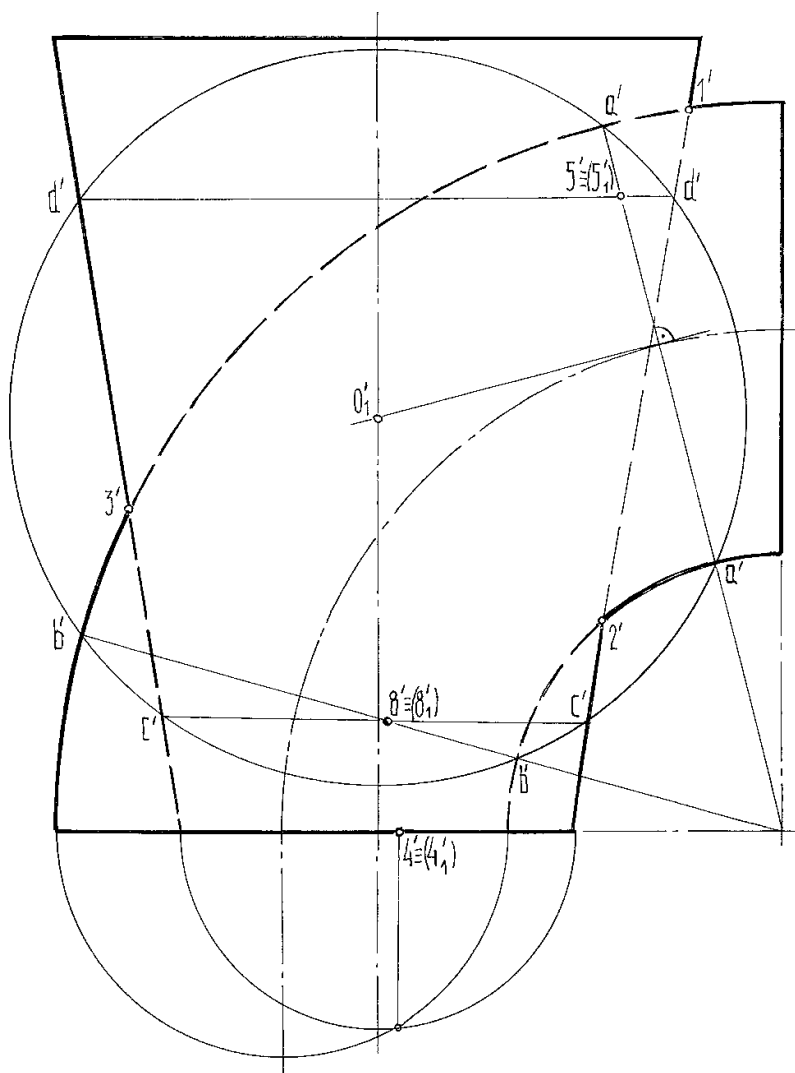


Рис. 27

Выбираем следующую окружность $e'e'$ на поверхности тора, определяем центр O_2^I сферы-посредника. Найдя линии пересечения с поверхностью конуса, обозначаем точки 6^I и 9^I . С помощью третьей сферы находим точки 7^I и 10^I . Определив достаточное количество точек пересечения, соединяем их плавной кривой линией (рис. 28). Находим горизонтальную проекцию линии пересечения по принадлежности линии поверхности конуса.

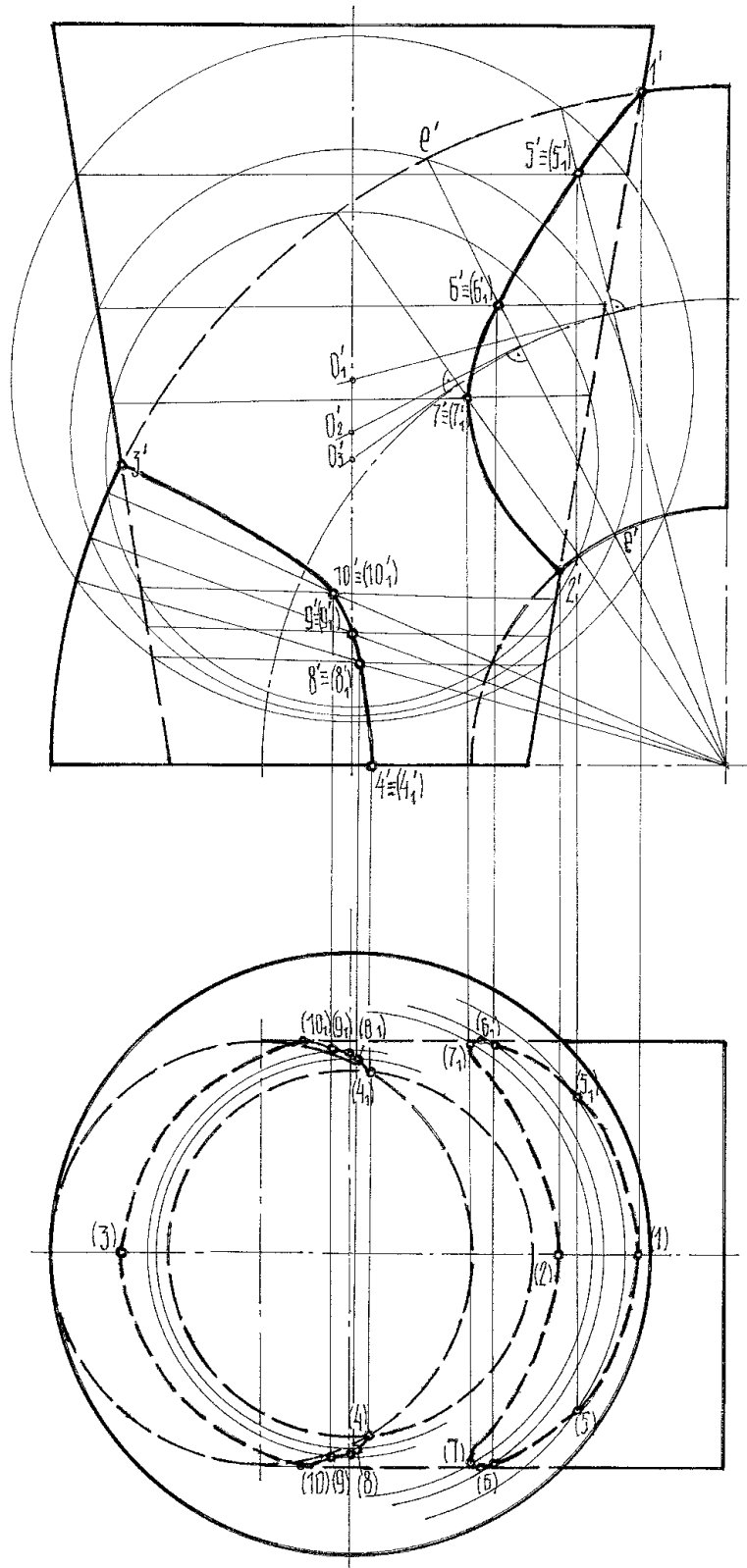


Рис 28

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тимрот Е.С. Начертательная геометрия : Учебное пособие для архитектурных вузов. – М.: Государственное изд-во литературы по стр-ву, арх-ре и строительным материалам, 1962 - 280 с.
2. Добряков А.И. Курс начертательной геометрии : Учебное пособие для строительных и архитектурных вузов. – М., Ленинград: Государственное изд-во литературы по с тр-ву и арх-ре, 1952 - 296 с.
3. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия : Учебник для строительных вузов и факультетов. – М: Изд-во «Высшая школа», 1969 -501 с.
4. Короев Ю.И. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Архитектура-С, 2007 – 424 с.